



WORKING PAPER N.02.05

Maggio 2002

**METODI MONTE CARLO PER  
LA VALUTAZIONE DI OPZIONI FINANZIARIE**

*R. Casarin<sup>a</sup>*  
*M. Gobbo<sup>a</sup>*

---

*a.* GRETA, Venice.

# METODI MONTE CARLO PER LA VALUTAZIONE DI OPZIONI FINANZIARIE

**Roberto CASARIN**

E-mail: rcasarin@greta.it

G.R.E.T.A.  
Venezia

**Michele GOBBO**

E-mail: mgobbo@greta.it

G.R.E.T.A.  
Venezia

**ABSTRACT** – I metodi di simulazione Monte Carlo si sono rivelati uno strumento efficace e computazionalmente flessibile per la risoluzione di problematiche di carattere finanziario. Questo intervento si propone di dare una breve presentazione dell’approccio Monte Carlo alla valutazione di opzioni finanziarie, con particolare attenzione ai problemi legati alla generazione di numeri casuali, sia nel caso univariato che multivariato, ed alle tecniche di riduzione della varianza al fine di rendere più efficienti tali metodi.

**KEYWORDS** – Metodi Monte Carlo, Option Pricing, Generazione di Numeri Casuali, Tecniche di Riduzione della Varianza.

## 1 INTRODUZIONE

Molti modelli studiati ed applicati in ambito finanziario non permettono di ricavare soluzioni in forma chiusa e quindi richiedono l’utilizzo di tecniche di tipo numerico per ottenere una soluzione approssimata accettabile. In particolare negli ultimi anni, data anche la crescente complessità computazionale richiesta, si è registrato un aumento dello studio dei metodi numerici. Tra questi un ruolo di grande importanza è ricoperto dai metodi di simulazione Monte Carlo [7].

La denominazione “*Monte Carlo*” fu coniata, all’inizio della II° guerra mondiale, da J. Von Neumann e S. Ulam mentre lavoravano al progetto Manhattan, presso il centro di ricerche nucleari Los Alamos (New Mexico). Essi si ispirarono, nella scelta del nome Monte Carlo, all’aleatorietà dei guadagni che caratterizza la celebre casa da gioco del principato monegasco.

Von Neumann e Ulam utilizzarono la simulazione di numeri casuali per generare i parametri delle equazioni che descrivevano la dinamica delle esplosioni nucleari. In tal modo era possibile ottenere le soluzioni delle equazioni senza dover inferire i parametri da dati sperimentali. Infatti, il numero di esperimenti necessari per dedurre i parametri

dall'osservazione del fenomeno sarebbe stato troppo elevato. Il termine “*Monte Carlo Method*” viene spesso utilizzato anche come sinonimo di “*Simulazione Stocastica*”.

Dalla descrizione del processo di simulazione Monte Carlo si può dedurre la sua natura sperimentale. Molto spesso in letteratura si definisce il processo di simulazione Monte Carlo come *Esperimento Monte Carlo*, infatti devono essere indicati tutti gli elementi che ne consentono la replicazione e l'analisi dei risultati.

In quanto tecnica di sperimentazione, lo studio in simulazione Monte Carlo dovrà essere disegnato in modo accurato considerando schemi sperimentali adatti al problema che si sta analizzando. Inoltre, spesso è necessario modificare la simulazione Monte Carlo (standard) introducendo una tecnica di riduzione della varianza che consenta di ottenere risultati più precisi. Va segnalato sin d'ora che le tecniche di riduzione della varianza introducono dipendenza tra le osservazioni simulate: si tratta di un problema generale che interessa la generazione dei numeri casuali, la simulazione di processi stocastici e la riduzione della varianza in particolare.

La presentazione è organizzata nel modo seguente: il paragrafo 2 introduce brevemente la metodologia Monte Carlo, alcune proprietà fondamentali e come tale tecnica viene utilizzata al fine della valutazione delle opzioni finanziarie. I paragrafi 3 e 4 approfondiscono due aspetti fondamentali di tali tecniche: la generazione di numeri casuali, “ingrediente” base di questi approcci, e alcune tecniche di riduzione della varianza al fine di rendere più efficienti tali metodi. Per brevità, si farà soprattutto riferimento al caso multidimensionale, che risulta essere particolarmente interessante ai fini applicativi.

## 2. METODI MONTE CARLO E VALUTAZIONE DI OPZIONI FINANZIARIE

I modelli di valutazione delle opzioni finanziarie rivestono un ruolo di fondamentale importanza nella moderna teoria della finanza. Nella maggior parte dei casi, tali modelli ipotizzano che il valore del bene sottostante l'opzione segua un particolare processo stocastico definito nel continuo. Sfruttando la condizione di non arbitraggio e ipotizzando che si operi in un ambiente neutrale al rischio, si dimostra che il valore dell'opzione si ottiene attualizzando il valore atteso del payoff dell'opzione al tasso privo di rischio.

Ad esempio, per un'opzione call europea si avrà:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[C_T] \quad 2.1$$

$$C_T = \max[S_T - X, 0] \quad 2.2$$

Dove  $r$  è il tasso di interesse privo di rischio,  $(T-t)$  è il tempo mancante a scadenza ed  $X$  è il prezzo d'esercizio.

Black e Scholes [3] riescono a ricavare il valore  $C_t$  nel caso in cui il prezzo del bene sottostante  $S_t$  evolva in modo continuo secondo il seguente andamento diffusivo (noto come moto browniano geometrico):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad 2.3$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  rappresentano media e volatilità annua del prezzo del titolo e  $dz$  è la variazione di un particolare processo di Markov, noto come processo di Wiener.

L'utilizzo della simulazione Monte Carlo per la valutazione del prezzo di un'opzione consiste nell'individuare dei possibili sentieri per il prezzo del bene sottostante e sfruttare l'assunzione di operare in un ambiente neutrale al rischio al fine di ricavare il valore dell'opzione come media attualizzata dei payoff. Il primo approccio di tale tipo è stato proposto da [4] e tale contributo è anche il primo che prevede l'applicazione della simulazione Monte Carlo a tematiche di carattere finanziario.

Sempre con riferimento ad un'opzione europea, i metodi Monte Carlo prevedono i seguenti passi:

- generazione dei sentieri per i prezzi del sottostante a scadenza:

$$S_{i,T} = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}\varepsilon_i} \quad 2.4$$

dove  $\varepsilon$  è un numero casuale estratto da una distribuzione normale standardizzata;

- calcolo del payoff:

$$C_{i,T} = \max[S_{i,T} - X, 0] \quad 2.5$$

- attualizzazione della media dei payoff ottenuti:

$$C_{i,MC} = e^{-r(T-t)} E(C_T), \quad 2.6$$

dove

$$E(C_T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max[0, S_{i,T} - X] \quad 2.7$$

In sostanza i metodi Monte Carlo stimano il valore dell'opzione calcolando una media campionaria degli  $M$  payoff attualizzati. Ricordando il teorema del limite centrale, al divergere del numero delle traiettorie  $M$ ,  $E(C_T)$  attualizzato tende a una distribuzione normale con media  $C_t$  e varianza  $\eta^2/M$ , dove con  $\eta$  si indica la varianza della variabile casuale payoff. Ricordiamo che il teorema del limite centrale è valido nel caso di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite. Si noti come la varianza della stimatore tende ad annullarsi al divergere del numero delle traiettorie. Si possono quindi ricavare degli intervalli di confidenza e verificare come l'errore della stima sia proporzionale a  $\eta/\sqrt{M}$  e non dipenda dalla dimensionalità del problema. In sostanza al fine di ottenere stime più accurate si deve aumentare il numero di simulazioni in modo quadratico.

L'ingrediente base di tali metodi è perciò  $\varepsilon$  che è estratto casualmente dalla distribuzione di interesse (in questo caso la normale standardizzata). È chiaro quindi che molti degli sforzi saranno concentrati nell'individuare delle tecniche che permettano di generare tali numeri casuali secondo opportuni criteri. Si possono individuare delle tecniche che permettono l'estrazione direttamente dalla distribuzione di interesse oppure utilizzare tecniche generali che considerano numeri casuali generati nell'intervallo unitario che vengono poi opportunamente trasformati.

Con riferimento alla valutazione di opzioni finanziarie, la simulazione Monte Carlo è particolarmente adatta alle opzioni di tipo europeo (esercitabili, cioè, solo a

scadenza) ed alle opzioni sentiero dipendenti [9]. Per un approccio Monte Carlo alla valutazione di opzioni americane si veda [6].

Se confrontata ad altre tecniche di valutazione, numeriche e non, alcuni autori [14] suggeriscono di considerare anche la dimensionalità del problema affrontato nella scelta della tecnica più efficiente. In particolare, per i problemi che prevedono un numero di sottostanti inferiore a tre, si suggerisce l'utilizzo di metodi alle differenze finite (o agli elementi finiti) [14], mentre per un numero maggiore si consiglia l'utilizzo di tecniche di simulazione Monte Carlo. Risulta quindi particolarmente interessante analizzare l'utilizzo delle tecniche di riduzione della varianza nei casi ad alta dimensionalità.

### 3. GENERAZIONE DI NUMERI CASUALI

Alla base dei metodi Monte Carlo vi è la generazione di numeri casuali. I metodi di simulazione che verranno trattati in seguito, traggono l'elemento di casualità dalla disponibilità di una successione (finita o infinita) di variabili casuali distribuite uniformemente tra 0 e 1 e tra loro indipendenti:

$$U_{i=0}^{\infty} = (U_i) = U_0, U_1, \dots, U_i, \dots \quad \text{con } U_i \sim U_{[0,1]} \quad 3.1$$

Il problema che si deve affrontare, prima di condurre un esperimento di simulazione, è la determinazione di un algoritmo in grado di generare numeri casuali. In realtà una sequenza casuale di valori si può ottenere misurando gli output di modelli fisici (un dado per esempio) in grado di generare una sequenza di valori non prevedibile. Il metodo più diffuso consiste però nella generazione di sequenze deterministiche che abbiano proprietà simili ad una sequenza casuale. Si può quindi definire uno dei concetti che stanno alla base del processo di simulazione.

*Una sequenza di numeri pseudo-casuali (o quasi-casuali) è una sequenza deterministica di numeri appartenenti all'intervallo  $[0,1]$ , che hanno le stesse proprietà statistiche rilevanti di una sequenza casuale di numeri.*

In generale si consiglia sempre di verificare che il generatore di numeri pseudo-casuali soddisfi le principali proprietà statistiche desiderate, mediante test opportuni oppure ricorrendo agli studi già condotti in letteratura [10, 11].

#### 3.1 Sequenze stocastiche e deterministiche

Gli algoritmi proposti in letteratura sono innumerevoli ed una loro trattazione anche superficiale va ben oltre gli obiettivi di questo intervento. Ci limitiamo a proporre due al fine di evidenziare i concetti fondamentali [13].

La classe di generatori detta congruenze lineari si definisce nel modo seguente:

$$X_i = (aX_{i-1} + c) \bmod M \quad i = 1, 2, \dots \quad 3.2$$

Dove  $a$  è detto moltiplicatore,  $b$  traslazione e  $M$  modulo tali che  $a, c, X_i \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$ . Dato un valore iniziale, detto anche "seme", è possibile ottenere una sequenza di numeri pseudo-casuali:

$$U_i = \frac{X_i}{M} \tag{3.3}$$

Se un elemento si ripete dopo  $k$  iterazioni, si dice che il generatore ha periodo  $k$ . I parametri vengono scelti in modo da rendere massimo tale valore. Si può dimostrare, tuttavia, che le  $k$ -ple di numeri generati con il metodo delle congruenze lineari giacciono su al più  $(k!m)^{1/k}$  iperpiani e quindi non sono distribuiti uniformemente nell'ipercubo  $[0,1]^k$ . Questo costituisce una forte limitazione all'uso di tale generatore per il caso multivariato.

Tra i metodi deterministici troviamo anche le successioni a bassa discrepanza, spesso presentate tra i metodi di riduzione della varianza poiché consentono di aumentare l'accuratezza dei risultati della simulazione. Si tratta infatti di algoritmi deterministici che generano sequenze di numeri pseudo-casuali in grado di coprire in modo uniforme lo spazio in cui si sta simulando. Gli algoritmi generano i numeri pseudo-casuali in modo da riempire gli "spazi vuoti" lasciati dalle precedenti generazioni casuali.

Per comprendere il tipo di algoritmi che consentono di generare successioni a bassa discrepanza, trattiamo ora a titolo esemplificativo la sequenza di Halton. Si consideri un numero intero  $i$ , esso può essere rappresentato in base  $b$  nel modo seguente:

$$i = \alpha_0 b^0 + \alpha_1 b^1 + \dots + \alpha_m b^m \tag{3.4}$$

con  $0 \leq \alpha_j < b$  e  $j = 0, 1, \dots, m$

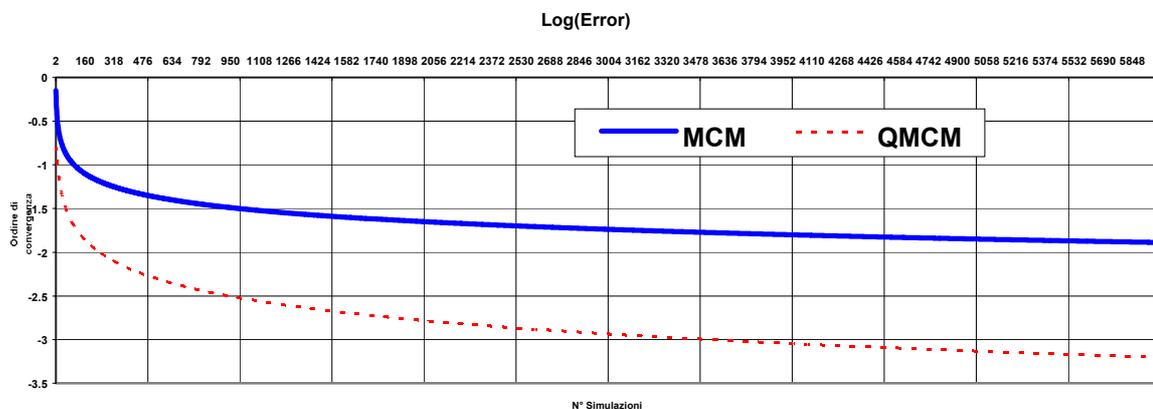
La sequenza di Halton è data da:

$$H(i; b) = \sum_{j=0}^m \alpha_j b^{-j-1} \tag{3.5}$$

e permette di generare un numero in base 10 tra 0 e 1. Per generare una sequenza su più dimensioni ( $n$ ) si considerano più basi:

$$H(i; b_1); H(i; b_2); \dots; H(i; b_n) \tag{3.6}$$

Grafico 1



Le successioni a bassa discrepanza (che individuano i metodi detti Quasi-Monte Carlo) sono caratterizzate da un ordine di convergenza dell'errore diverso rispetto ai metodi Monte Carlo classici, pari a  $(\log M)^d/M$ , dove  $d$  è la dimensionalità del problema [1] (figura 1). Si può dimostrare tuttavia che l'efficienza nel coprire in modo uniforme l'iperpiano unitario si deteriora all'aumentare della dimensionalità. I valori generati, in particolare presentano caratteristiche di collinearità [8].

**3.2 Metodo della Funzione di Ripartizione Inversa**

Il metodo di simulazione noto come Funzione di Ripartizione Inversa utilizza una delle caratteristiche costitutive della definizione di funzione di ripartizione di una variabile casuale. Gli algoritmi di simulazione per variabili casuali specifiche possono essere ricondotti, in questo caso ad un principio generale ben noto in statistica.

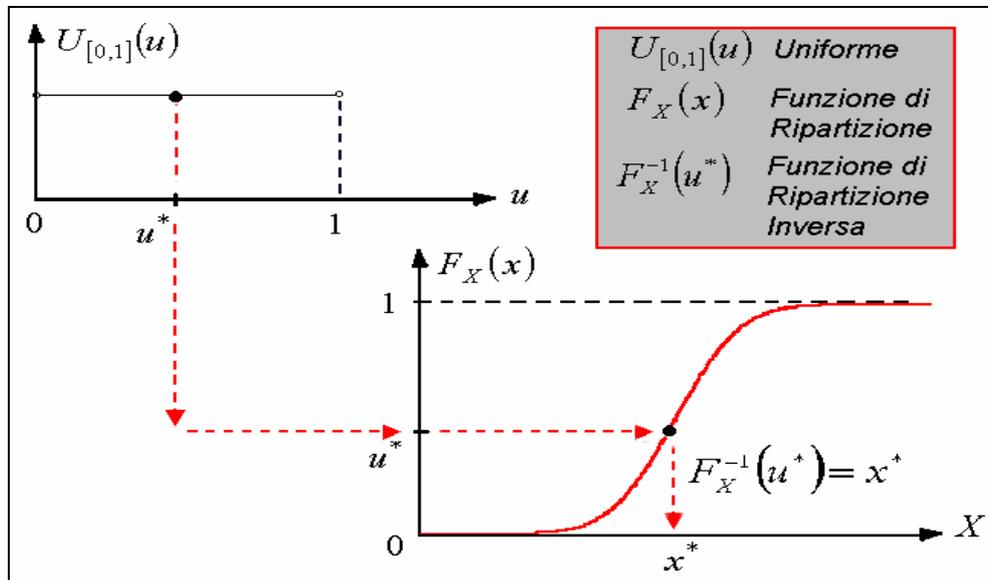
$$\begin{cases} F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \Pr\{w : X(w) \leq x\} \\ \Omega \equiv R \rightarrow [0,1] \subset R \end{cases} \quad 3.7$$

E' il metodo più generale di simulazione e richiede che la funzione di densità di probabilità sia integrabile e che la funzione di ripartizione sia invertibile.

Data la generazione di numeri casuali (o pseudo-casali) uniformemente distribuiti in  $[0,1]$  e la successiva trasformazione dell' $i$ -esimo valore generato mediante la funzione di ripartizione inversa si ottengono valori casuali estratti dalla distribuzione  $f(x)$ .

$$X_i \sim F^{-1}(u_i) \text{ con } U_i \sim U_{[0,1]} \quad 3.8$$

Grafico 2



**3.3 Metodo Standard Rejection**

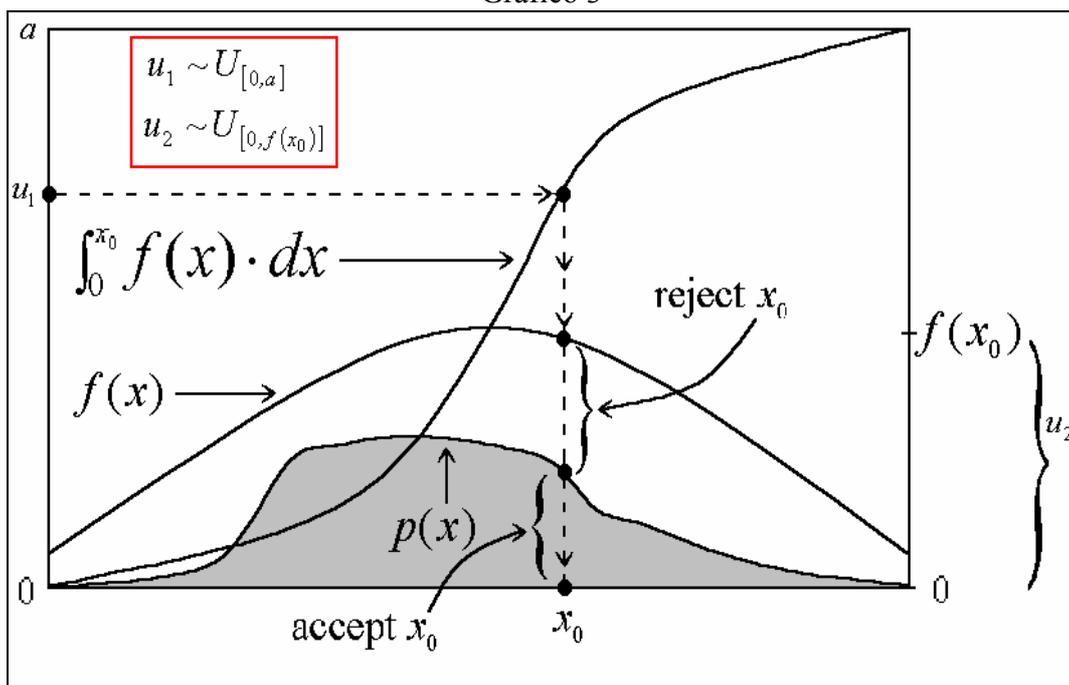
Sfortunatamente, non tutte le funzioni di ripartizione possiedono le proprietà che permettono l'utilizzo del metodo della funzione inversa. Il metodo di simulazione noto come metodo *Standard Rejection* è uno strumento potente e generale per la generazione di numeri casuali da una qualsiasi variabile casuale la cui funzione di distribuzione sia

nota e computabile. L'ovvio vantaggio di tale metodo risiede nella possibilità di generare osservazioni casuali da distribuzioni non integrabili o la cui funzione di ripartizione non sia invertibile e non consenta, quindi, utilizzare il metodo della funzione inversa.

Il metodo si sviluppa attraverso i seguenti passaggi fondamentali:

1. tracciare il grafico della distribuzione  $p(x)$  da cui si intende generare osservazioni casuali;
2. tracciare nello stesso grafico un'altra curva  $f(x)$  (*Comparison Function*) (caratterizzata da integrale invertibile) con area finita, che giaccia sempre al di sopra della distribuzione d'interesse  $p(x)$ ;
3. 1<sup>a</sup> estrazione casuale. Estrarre un numero casuale da una distribuzione uniforme tra 0 ed  $a$  (dove  $a$  è l'integrale di  $f(x)$ ) Attraverso l'inversa dell'integrale della  $f(x)$  si ottiene un valore proiettato sull'asse delle  $x$  ( $x_0$ );
4. 2<sup>a</sup> estrazione casuale. Estrarre una osservazione da una distribuzione uniforme tra 0 e  $f(x_0)$ ;
5. accettare l'estrazione  $x_0$  come estrazione dalla distribuzione  $p(x)$  se la seconda estrazione (punto 4) è inferiore a  $p(x_0)$  altrimenti rigettare e ripetere il procedimento (dal punto 1 al punto 5).

Grafico 3



Tale metodo, quindi, richiede l'individuazione di una funzione di confronto (*Comparison Function*) che stia al di sopra della funzione di distribuzione da cui si vuole simulare ed è necessario, al fine di massimizzare l'efficienza dell'algoritmo, che abbia distanza minima dalla funzione di densità da cui si vuole simulare. Infatti, tanto più piccola è la distanza tra la *Comparison Function* e la funzione di densità, tanto più piccolo è il numero di punti che vengono rigettati durante il processo di simulazione e, a

parità del numero di osservazioni da simulare, minore sarà il tempo richiesto per la generazione dei dati.

Un'estensione di tale tecnica è nota come metodo *Extended Rejection*. Oltre a presentare il vantaggio di consentire la generazione di valori da qualsiasi variabile casuale, tale metodo consente di ridurre il numero di volte in cui l'algoritmo di simulazione valuta la funzione di densità. Tale metodo risulta particolarmente utile nella simulazione da variabili casuali caratterizzate da funzioni di densità difficilmente trattabili dal punto di vista computazionale e richiede l'individuazione di due *Comparisons Functions*: la prima deve giacere al di sopra della funzione di densità, la seconda al di sotto.

Un caso particolarmente interessante è dato dalla generazione di numeri casuali normalmente distribuiti, in quanto la maggior parte delle applicazioni finanziarie si basano sull'assunzione di normalità dei rendimenti. Sfortunatamente, la funzione di distribuzione della normale non è invertibile e l'inversione numerica presenta notevoli difficoltà. Per una rassegna delle tecniche proposte per superare tale problema si veda [13].

#### 4. TECNICHE DI RIDUZIONE DELLA VARIANZA

La tecnica di simulazione Monte Carlo tradizionale fornisce una limitazione probabilistica dell'errore che risulta indipendente dalle dimensioni del problema studiato in quanto è proporzionale a  $\eta/\sqrt{M}$ . In molti casi, tuttavia, questi metodi comportano la generazione di un numero troppo elevato di estrazioni casuali. In sostanza, si ottiene una accuratezza accettabile solo a fronte di costi computazionali ritenuti inaccettabili.

In questo paragrafo analizzeremo alcune delle più rilevanti tecniche proposte in letteratura che hanno l'obiettivo di ridurre, a parità di altre condizioni, l'errore di approssimazione commesso attraverso una riduzione della varianza degli stimatori.

##### 4.1 Tecnica delle variabili antitetiche

Il metodo delle variabili antitetiche è una delle tecniche di più rapida applicazione, in quanto non aumenta i tempi computazionali e consente di ridurre la varianza dello stimatore Monte Carlo.

Tale metodo, infatti, non richiede ri-campionamenti, ma semplicemente il cambio di segno delle osservazioni già simulate da una particolare distribuzione. Successivamente si valuta la funzione di cui si vuole calcolare il valore atteso sia rispetto alle osservazioni originali sia rispetto alle stesse cambiate di segno. Si osserva che lo stimatore ottenuto applicando la tecnica delle variabili antitetiche risulta dalla combinazione di due stimatori ottenuti, non da due campioni indipendenti, ma da campioni di simulazioni dipendenti. Occorrerà quindi apportare delle modifiche al procedimento di calcolo delle bande di confidenza dello stimatore Monte Carlo, in quanto l'analisi statistica effettuata precedentemente ipotizzava implicitamente l'indipendenza delle estrazioni.

La stima con tale metodo è data da:

$$\hat{E}_{AV}[g(x)] = \frac{1}{2} \cdot (\hat{E}[g(x)] + \hat{E}[g(-x)]) \quad 4.1$$

dove  $g(x)$  indica il payoff dell'opzione.

La combinazione di stimatori su campioni di simulazioni dipendenti produce una riduzione della varianza solamente nel caso di correlazione negativa tra gli stimatori e la riduzione sarà tanto più sensibile quanto più la correlazione è elevata in termini assoluti. Si può dimostrare che tale risultato vale per tutte le opzioni il cui valore dipende monotonicamente dai dati simulati.

#### 4.2 Tecnica della variabile di controllo

Il metodo di riduzione della varianza noto come tecnica della variabile di controllo si fonda sullo stesso principio della tecnica delle variabili antitetiche, di cui costituisce una generalizzazione in quanto utilizza una quantità che varia “assieme” alla variabile di interesse.

E' uno dei metodi più utilizzati e si basa sull'idea “*use what you know*” che, per valutare qualcosa di “sconosciuto” (obiettivo), si può procedere nella valutazione di un altro obiettivo simile (la variabile di controllo) ma completamente conosciuto. Per esempio se il prodotto finanziario che si vuole valutare è complesso si può procedere alla valutazione un prodotto simile di cui esiste la soluzione in forma chiusa lasciando che il metodo Monte Carlo determini la differenza di valore.

Il metodo sostituisce il valore atteso (da stimare) della variabile casuale  $Z$  (ad esempio il payoff di un'opzione a sua volta funzione della variabile casuale  $X$ ) con la seguente quantità da stimare:

$$Z - (W - E(W)) \quad 4.2$$

in cui  $W$  è anch'essa una trasformata di  $X$  ma il cui valore atteso teorico è noto.

Stimando in simulazione la precedente quantità si ottiene:

$$\bar{Z}^{cv} = \bar{Z} - (\bar{W} - E(W)) \quad 4.3$$

dove  $\bar{Z}^{cv}$  è uno stimatore della media  $E(Z)$  a partire dallo stimatore diretto di  $E(Z)$  corretto per una stima dell'errore  $(\bar{W} - E(W))$  utilizzata come quantità di controllo.

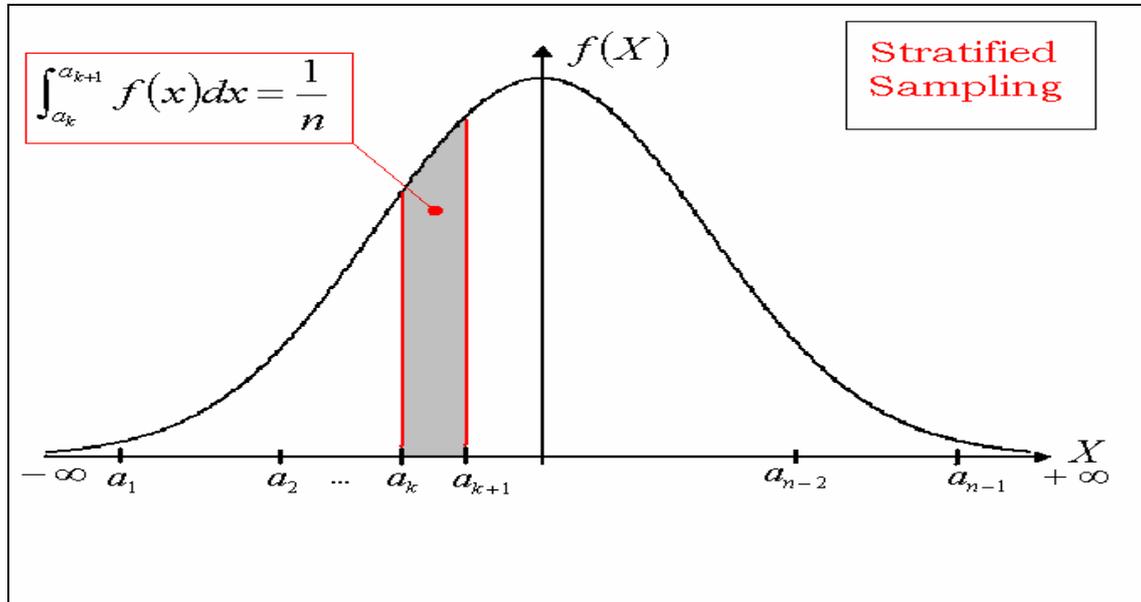
Un esempio classico di applicazione di tale tecnica si ha nel caso di valutazione di opzioni asiatiche, le quali richiedono la media dei prezzi del sottostante per il calcolo del payoff. Essendo disponibile una soluzione in forma chiusa solo nel caso in cui la media sia di tipo geometrico, si utilizza tale opzione come variabile di controllo per valutare un'opzione il cui payoff consideri invece una media di tipo aritmetico.

#### 4.3 Tecnica del campionamento stratificato

Il metodo di riduzione della varianza noto come campionamento stratificato è uno dei metodi più semplici tra quelli che consentono di rappresentare, in modo completo, l'insieme di supporto della variabile da cui si sta simulando, anche con campioni di piccole dimensioni. È un metodo di simulazione “stocastico” in quanto comporta la ripartizione dell'insieme di definizione della distribuzione di probabilità in un numero predeterminato di intervalli dai quali si estraggono casualmente delle osservazioni campionarie. Ogni intervallo corrisponde ad un'area della distribuzione di probabilità di uguale valore (intervalli equiprobabili) e la descrizione della distribuzione da cui si sta simulando sarà tanto più efficiente quanto più elevato è il numero di intervalli equiprobabili.

In simulazione per ogni intervallo viene estratto casualmente un insieme di osservazioni campionarie in modo che la frequenza in ciascun intervallo sia conforme con le probabilità teoriche. In corrispondenza di ogni intervallo si effettuano  $m$  simulazioni in modo che il numero di simulazioni sia pari  $N=m*n$ . Si dimostra che il metodo del campionamento stratificato è massimamente efficiente nel caso in cui il numero di sotto-intervalli ( $n$ ) è uguale al numero di simulazioni ( $N$ ).

Grafico 4



#### 4.4 Tecnica di campionamento *Latin Hypercube*

Il metodo di riduzione della varianza noto come tecnica di campionamento *Latin Hypercube* si presenta come estensione al caso  $d$ -dimensionale del metodo del campionamento stratificato.

Tale metodo consente una riduzione della varianza dello stimatore poiché, in modo del tutto simile al metodo del campionamento stratificato permette di rappresentare in modo più efficiente l'insieme di definizione  $d$ -dimensionale della variabile casuale da cui si sta simulando. In simulazione, per ogni intervallo  $d$ -dimensionale viene estratto casualmente un insieme di osservazioni campionarie in modo che ad ogni intervallo  $d$ -dimensionale corrisponda ad un'area della distribuzione di probabilità di uguale valore (intervalli equiprobabili).

Un primo modo di estendere la tecnica del campionamento stratificato al caso di simulazione  $d$ -dimensionale consiste nel ripartire l'insieme di supporto della variabile casuale su ogni dimensione in  $n$  intervalli. In questo modo vengono generati  $n^d$  ipercubi.

Generata una successione di vettori  $d$ -dimensionali di variabili casuali uniformi:

$$\{U_j\}_{j=1,\dots,n} \quad U_j = (U_j^{(1)}, \dots, U_j^{(d)}) \quad 4.4$$

si applica una trasformazione di variabile che consente di ottenere un vettore di variabili casuali uniformemente distribuite in ciascuno degli  $n^d$  intervalli  $d$ -dimensionali:

$$V_j = \frac{U_j + (i_1, \dots, i_d)}{n} \quad 4.5$$

in cui  $i_k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  rappresenta l'estremo inferiore dell' $i$ -esimo intervallo nella dimensione  $k$ -esima, con  $k = 1, 2, \dots, d$ .

Il primo problema che si presenta in questo metodo è dato dalla complessità computazionale dovuta all'elevato numero di intervalli ( $n^d$ ) che occorre generare, tranne il caso in cui  $n$  sia molto "piccolo".

Il secondo problema è la dipendenza tra gli elementi casuali del vettore. La stratificazione induce infatti un ordinamento crescente nella successione delle osservazioni simulate dalla distribuzione uniforme. Questo ordinamento si ripete in ciascuna dimensione del vettore casuale generando quindi una dipendenza tra gli elementi dello stesso.

Per evitare questi problemi viene introdotto il metodo detto *Latin Hypercube*. Esso può essere definito come un metodo di generazione casuale  $d$ -dimensionale che consente di mantenere le condizioni di regolarità introdotte dalla stratificazione in sotto-intervalli. Il metodo di simulazione *Latin Hypercube* comporta:

- A) la ripartizione dell'insieme di supporto  $d$ -dimensionale in una successione di intervalli ( $n^d$ ) disgiunti, in cui  $n$  rappresenta il numero di sotto-intervalli per ciascuna delle  $d$  dimensioni. Si suppone, per semplicità che ciascuna dimensione sia scomposta in un numero uguale di sotto-intervalli;
- B) la costruzione di una successione di  $n$  variabili casuali distribuite secondo  $f(x)$  in ogni intervallo. Sia quindi data una successione di  $n$  vettori di variabili casuali uniformi  $(0,1)^d$ :

$$\{U_j\}_{j=1,\dots,n} \quad U_j = (U_j^{(1)}, \dots, U_j^{(d)}) \tag{4.6}$$

mediante la seguente trasformazione è possibile ottenere una successione di  $n$  vettori di variabili casuali uniformi definite su ciascun intervallo  $d$ -dimensionale:

$$V_j^{(k)} = \frac{U_j^{(k)} + \pi_k(j) - 1}{n} \tag{4.7}$$

con  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$  e dove la successione  $(\pi_1, \dots, \pi_d)$  è costituita da permutazioni casuali indipendenti relative all'insieme  $\{1, \dots, n\}$  ed ognuna uniformemente distribuita sull'intervallo  $(0, n)$ . La randomizzazione assicura che ciascun vettore  $V_j$  sia uniformemente distribuito sull'ipercubo  $d$ -dimensionale. La seguente ulteriore trasformazione consente di ottenere una successione di  $n$  vettori di variabili casuali  $d$ -dimensionali distribuite secondo  $f(x)$  su ogni intervallo:

$$\begin{aligned} Z_j &= F^{-1}(V_j) \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \text{con } Z_j &\in [a_{j-1}, a_j]^d \\ V_j &= \begin{pmatrix} V_j^{(1)} \\ \vdots \\ V_j^{(d)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

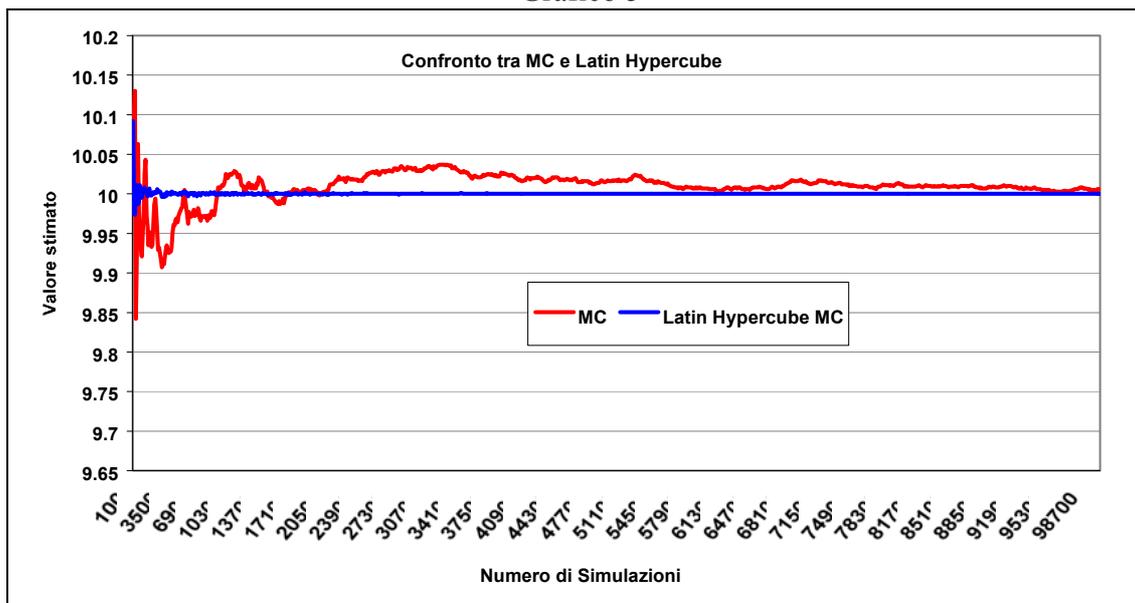
- C) La scelta del numero  $m$  di osservazioni da simulare per ciascun intervallo. Sia  $N$  il numero di simulazioni che si vogliono ottenere. La relazione tra il numero di sotto-intervalli per ciascuna dimensione ( $n$ ), il numero di simulazioni per sotto-intervallo ( $m$ ) ed il numero complessivo di simulazioni ( $N$ ) è dato da:

$$N^d = n^d \cdot m^d = (n \cdot m)^d \quad 4.9$$

Si presenta un confronto tra i metodi Monte Carlo e *Latin Hypercube* applicati alla stima della media della funzione  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$ . Osserviamo che le variabili casuali  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ) si distribuiscono come normali standardizzate, con matrice di correlazione diagonale in quanto le 10 variabili casuali sono indipendentemente distribuite. Inoltre avremo che  $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2)$  si distribuisce come una chi-quadro con 10 gradi di libertà. Quindi la variabile casuale  $g(x)$  ha media teorica 10 e varianza teorica  $2 \cdot 10 = 20$ .

La stima della media di  $g(x)$  si ottiene simulando i valori della variabile casuale  $x$  di dimensione 10, calcolando il valore di  $g(x)$  e facendo la media su tutte le simulazioni. Le simulazioni (in numero crescente da 100 a 100.000) sono effettuate con i metodi Monte Carlo e campionamento *Latin Hypercube*.

Grafico 5



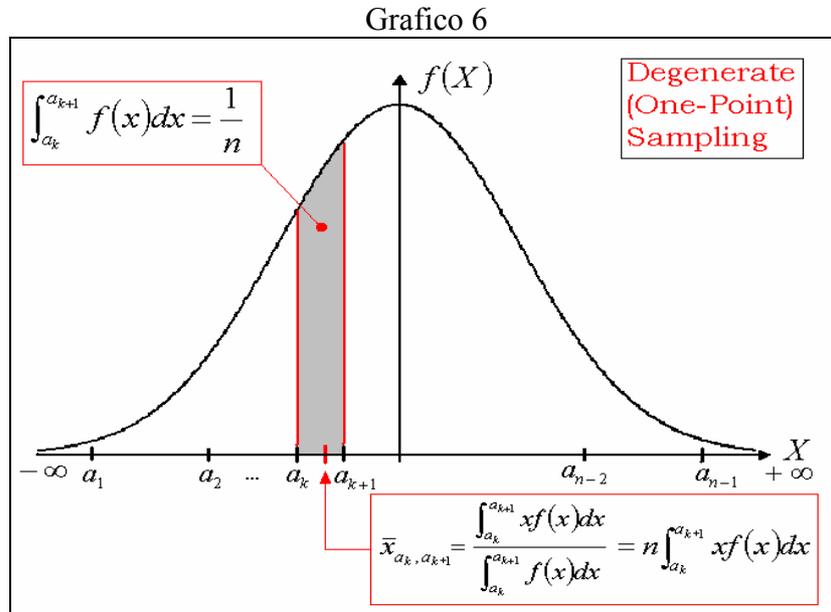
#### 4.5 Tecnica del campionamento degenerare

Il metodo di riduzione della varianza noto come tecnica del campionamento degenerare può essere considerato uno tra i più efficienti [12]. Consente una riduzione della varianza dello stimatore poiché, in modo del tutto simile al metodo del campionamento stratificato, permette di rappresentare in modo più efficiente l'insieme di definizione della variabile casuale da cui si sta simulando. A differenza del campionamento stratificato, tuttavia, è un metodo di simulazione "deterministico", in quanto comporta la ripartizione dell'insieme di definizione della distribuzione di probabilità in un numero predeterminato di intervalli ai quali è associato un punto rappresentativo.

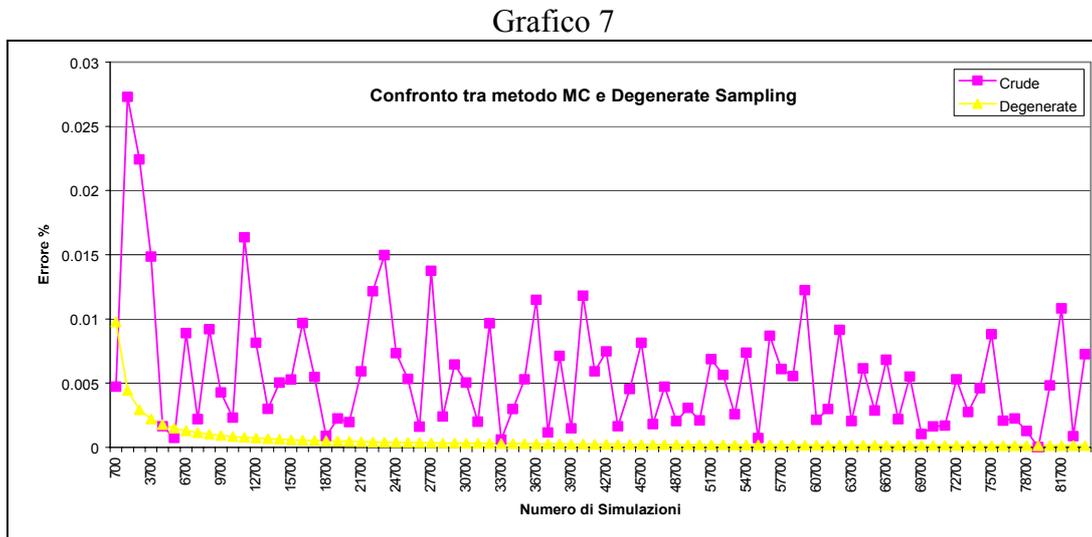
Determinata la successione degli intervalli è necessario scegliere un punto rappresentativo di ciascun intervallo. La scelta può cadere:

- su uno degli estremi (inferiore o superiore) dell'intervallo;
- sul punto risultante dalla media aritmetica degli estremi;
- sulla media di tutti i punti dell'intervallo pesata sulla base della densità di probabilità di ciascun punto.

Quest'ultima via è quella seguita nella pratica (Grafico 6).



Si propone ora una comparazione tra il metodo di simulazione Monte Carlo standard ed il metodo del campionamento degenerato.



Il confronto è condotto sulla valutazione di una opzione call europea. Il valore iniziale del sottostante ed il prezzo d'esercizio sono pari a 100, il tempo mancante a scadenza pari ad un anno mentre il tasso d'interesse privo di rischio e la volatilità sono pari rispettivamente al 10% e a 0.2 (Grafico 7).

#### 4.6 Tecnica del *matching* tra momenti (o *quadratic sampling*)

Tale metodo di riduzione della varianza è stato proposto da [2] e richiede la trasformazione delle osservazioni già simulate da una distribuzione in modo che i momenti empirici uguagliano un numero finito di momenti della distribuzione teorica  $f(x)$ . Successivamente si valuta la funzione di cui si vuole calcolare il valore atteso rispetto a queste osservazioni simulate trasformate. Tale metodo di simulazione è completamente stocastico e introduce dipendenza tra le osservazioni trasformate. Occorre quindi apportare delle modifiche al procedimento di calcolo delle bande di confidenza dello stimatore Monte Carlo.

La riduzione della varianza rispetto al metodo Monte Carlo dipende dal tipo di trasformazione applicata alle osservazioni simulate e dalle caratteristiche della funzione che lega la variabile da cui si sta simulando alla variabile di cui si vogliono calcolare la distribuzione o i momenti. Il metodo di simulazione *Moment Matching* comporta:

- A) la simulazione di un insieme di  $n$  osservazioni casuali indipendenti e identicamente distribuite secondo la funzione di densità di probabilità  $f(x)$ ;
- B) la trasformazione delle osservazioni simulate in modo tale che i momenti della loro distribuzione empirica eguagliano un numero finito di momenti della distribuzione teorica  $f(x)$ ;
- C) il calcolo della funzione  $g(x)$  sulle  $n$  osservazioni trasformate al punto B) ed il computo del suo valore medio.

Il problema della dipendenza delle osservazioni trasformate e della distorsione del simulatore ottenuto con il metodo *Moment Matching* rendono difficile la determinazione, dal punto di vista analitico, dei vantaggi ottenibili utilizzando tale metodo. Si dimostra empiricamente che la varianza del simulatore costruito eguagliando i primi due momenti è inferiore a quella del simulatore costruito eguagliando solo il momento primo.

Il metodo *Moment Matching* può essere esteso al caso in cui si uguagliano i momenti di ordine superiore al secondo della distribuzione empirica a quelli della distribuzione da cui si sta simulando.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] ACWORTH P., BROADIE M., GLASSERMAN P., A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Technique for Option Pricing in “*MC and QMC Methods 1996*”, NIEDERREITER H., HELLEKALEK P., LARCHER G., ZINTERHOF P., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] BARRAQUAND J., Numerical valuation of high dimensional multivariate European securities, *Management Science*, Vol. 41, 1882-1891, 1995.
- [3] BLACK F., SCHOLES M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 637-657, 1973.
- [4] BOYLE P., Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, 323-338, 1977.
- [5] BOYLE P., BROADIE M., GLASSERMAN P., Monte Carlo Methods for Security Pricing, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 2, 1267-1321, 1997.
- [6] BROADIE M., GLASSERMAN P., Monte Carlo Methods for Pricing High-Dimensional American options: An Overview in “*Monte Carlo: Methodologies*

- and Applications for Pricing and Risk Management*", DUPIRE B., Risk Books, London, 1998.
- [7] DUPIRE B., Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management, *Risk Books*, London, 1998.
- [8] JOY C., BOYLE P., TAN K.S., Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance, *Management Science*, Vol. 2, 926-936, 1996.
- [9] KEMNA A.G.Z., VORST A.C.F., A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 14, 113-129, 1990.
- [10] KNUTH D.E., *The Art of Computer Programming*, Vol. 2, 1969.
- [11] NIEDERREITER H., Random Number Generation and QMC Methods, CBMS-NSF, Vol. 63, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [12] PIANCA P., Numerical approximations to standard Gaussian density applications to options pricing, Atti giornata di studio *Metodi numerici per la finanza*, Venezia 7 maggio 1999.
- [13] PRESS W., TEUKOLSKY S., VETTERLING T., FLANNERY B.P., *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computation*, 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [14] WILMOTT P., DEWYNNE J., HOWISON S. D., *The Mathematics of Financial Derivatives: a Student Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.